Prof. Dr. Salma Kuhlmann,
Dr. Lothar Sebastian Krapp,
Michele Serra, Sarah Tanja Hess

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2021

Übungen zur Vorlesung Algebraische Zahlentheorie
Blatt 4

Abgabe von: Mein Name
TutorIn: Mein(e) Lieblingstutor(in)

1	2	3	4	Σ

Allgemeiner Hinweis: Für die Bearbeitung werden alle Resultate bis einschließlich Vorlesung 21 vorausgesetzt. Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Aufgabe 4.1 **[2+2 Punkte]**

Sei $f(x) := x^n + ax + b \in \mathbb{Q}[x]$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$ ein irreduzibles Polynom mit Nullstelle $\alpha \in \mathbb{C}$, $L := \mathbb{Q}(\alpha)$, $y = \frac{-nb}{x+(n-1)a} \in \mathbb{Q}(x)$ und betrachten Sie die rationale Funktion $f(y) = \frac{p(x)}{q(x)}$ für geeignete $p, q \in \mathbb{Q}[x]$.

(a) Bestimmen Sie explizit ein geeignetes normierte Polynom p des Grades n für $f(y)$ und ermitteln Sie $p(0)$. Warum ist p eindeutig?

(b) Vollziehen Sie *Proposition/Beispiel* auf Seite 2 von Skript 20 anhand von $f(x) := x^3 + 2x + 1$ nach und vergleichen Sie Ihre Erkenntnis mit Ihrem Ergebnis aus *Aufgabe 3.1.*

Lösung:

Aufgabe 4.2 **[4 Punkte]**

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ ein vollständiges Gitter mit Basis $\mathcal{B} := \{v_1, \ldots, v_n\}$ und fundamentalem Parallelotop T_Γ. Beweisen Sie

$$v(T_\Gamma) = \left| \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \right|.$$

Lösung:

Aufgabe 4.3 **[1+2,5+0,5 Punkte]**

Sei $\tau \in \mathbb{R}$, $s, t \in \mathbb{N}_0$, $(s,t) \neq (0,0)$,

$$X(s,t,\tau) := \{(x_1, \ldots, x_s, a_1, b_1, \ldots, a_t, b_t) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{2t} \mid \sum_{i=1}^{s} |x_i| + 2\sum_{j=1}^{t} |a_j^2 + b_j^2|^{\frac{1}{2}} \leq \tau\}.$$

und

$$Y(s,t,\tau) := \{(x_1, \ldots, x_s, a_1, b_1, \ldots, a_t, b_t) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{2t} \mid x_1, \ldots, x_s \geq 0\} \cap X(s,t,\tau).$$

(a) Beweisen Sie durch Induktion nach s und der Verwendung des Satzes von Fubini, dass das Volumen von $Y(s,0,\tau)$ durch $v(Y(s,0,\tau)) = \frac{\tau^s}{s!}$ gegeben ist.

(b) Beweisen Sie durch Induktion nach t, der Verwendung des Satzes von Fubini und der Ausnutzung von Polarkoordinaten, dass das Volumen von $Y(s,t,\tau)$ durch $v(Y(s,t,\tau)) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^t \frac{\tau^{s+2t}}{(s+2t)!}$ gegeben ist.

(c) Folgern Sie $v(X(s,t,\tau)) = 2^s \left(\frac{\pi}{2}\right)^t \frac{\tau^{s+2t}}{(s+2t)!}$.

Lösung:

Aufgabe 4.4* **[1+1+1+1 Punkte]**

Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl.

(a) Sei $p \neq 2$.

(i) Beweisen Sie die Existenz geeigneter ganzer Zahlen m und n mit

$$m^2 + n^2 + 1 \equiv 0 \mod p.$$

(ii) Fixieren Sie $m, n \in \mathbb{Z}$ gemäß (i) und betrachten Sie die Menge

$$\Gamma := \{(a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4 \mid c \equiv ma + nb \mod p,\ d \equiv mb - na \mod p\}.$$

Zeigen Sie, dass Γ ein vollständiges Gitter in $\mathbb{R}^4$ ist.

(iii) Sei T_Γ ein fundamentales Parallelotop von Γ mit Volumen $v(T_\Gamma) = p^2$. Beweisen Sie unter Verwendung von *Satz 21.8 (Minkowski)* die Existenz geeigneter ganzer Zahlen a, b, c und d mit

$$p = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

(b) Folgern Sie, dass jede natürliche Zahl eine Summe aus vier Quadraten ganzer Zahlen ist.

Lösung:

Abgabe: Bis **Donnerstag, den 15. Juli 2021, um 10:00 Uhr**, direkt an den Tutor / die Tutorin. Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.